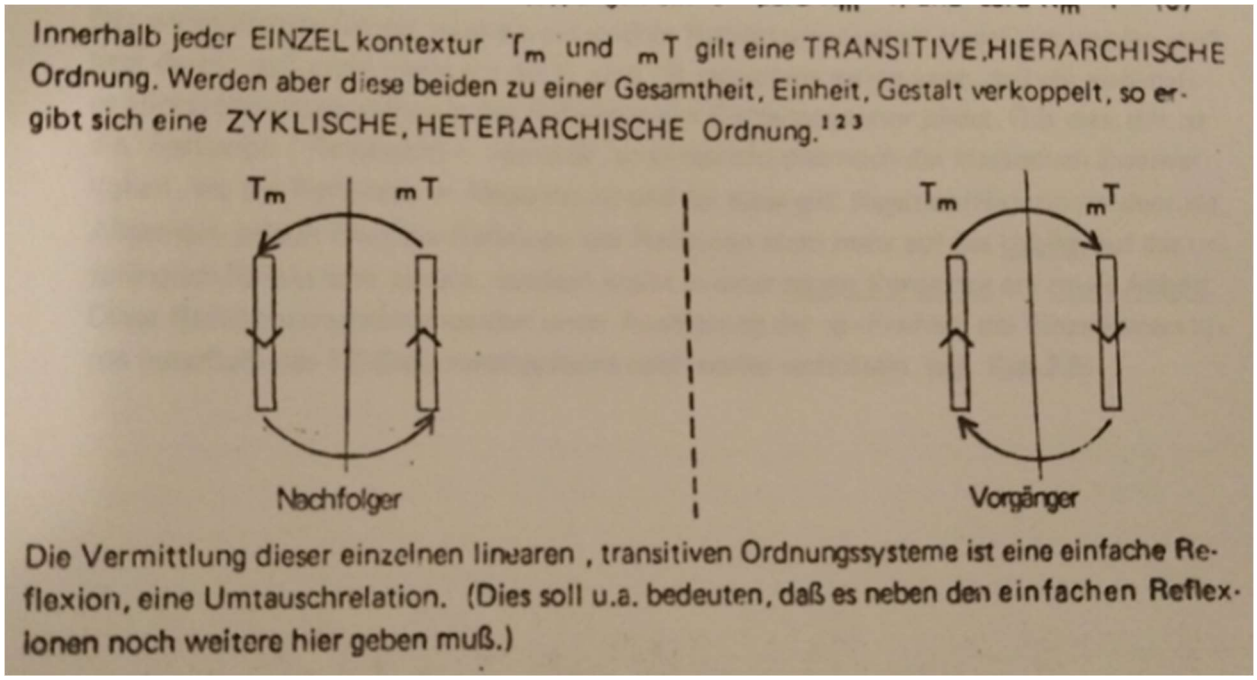
Prof. Dr. Alfred Toth

Reflexionsrelationen semiotischer CAs

> Eine Wissenschaft ist die Invariantentheorie einer Gegenständlichkeit.
>
> Max Bense (1939, S. 79)

1. Auf der Grundlage der umfassenden Darstellung einer polykontexturalen Semiotik in Toth (2019a) wurden in Toth (2019b-h) die ersten Grundlagen zu einer zukünftigen Theorie semiotischer zellulärer Automaten (CAs) geschaffen. Semiotische CAs sind ihrer Natur gemäß qualitativ, denn das Zeichen ist nach Peirce eine triadische Relation, die nicht nur über einen Mittelbezug, sondern auch über einen Objekt- und einen Interpretantenbezug verfügt, d.h. das Zeichen, wie es von Bense (1981, S. 17 ff.) als Zeichenzahl eingeführt wurde, rechnet auch mit Sinn und Bedeutung. Wie im folgenden gezeigt wird, korrespondieren den $2^8 = 256$ Regeln der quantitativen CAs (vgl. Gardner 1970) 360 Regeln der qualitativen (semiotischen) CAs. Diese lassen sich, wie ebenfalls gezeigt wird, in Paare gleicher Outputs für jede der 15 Gruppen zu je 24 CAs subgruppieren.

2. Auf die Existenz von Paaren von reflektorischen Systemen hatte bereits Kronthaler (1986, S. 48) hingewiesen.

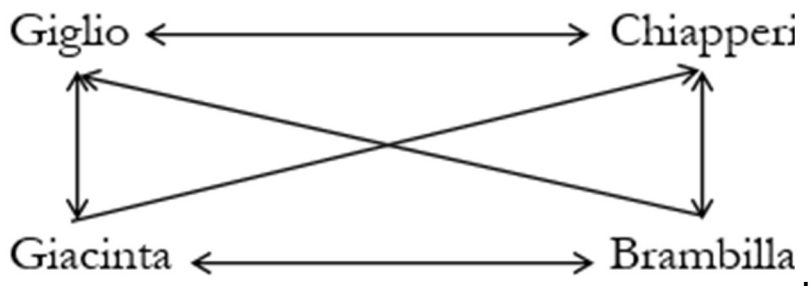

Innerhalb jeder EINZEL kontextur T_m und $_mT$ gilt eine TRANSITIVE, HIERARCHISCHE Ordnung. Werden aber diese beiden zu einer Gesamtheit, Einheit, Gestalt verkoppelt, so ergibt sich eine ZYKLISCHE, HETERARCHISCHE Ordnung.[123]

Die Vermittlung dieser einzelnen linearen, transitiven Ordnungssysteme ist eine einfache Reflexion, eine Umtauschrelation. (Dies soll u.a. bedeuten, daß es neben den einfachen Reflexionen noch weitere hier geben muß.)

Wir zeigen im folgenden im Anschluß an Toth (2019h), daß sich die 360 Regeln der qualitativen semiotischen CAs in Form von Paaren reflektorischer Dualität darstellen lassen, d.h. es genügen 180 Regeln plus die Dualisationsoperation. Das Besondere ist nun, daß die kategorietheoretische Struktur von semiotischen CAs der Form (A → B) → C, darin A, B, C Morphismen sind, sich in der Form chiastischer Quadrupelrelationen darstellen lassen, und zwar haben diese die allgemeine Form

$$\begin{array}{ccccc} (a \to b) & & (c \to d) & \to & (e \to f) \\ & \times & & & | \\ (d \to c) & & (b \to a) & \to & (e \to f) \end{array}$$

Ein Vorläufermodell für die chiastische Quadrupelrelation finden wir nach Toth (2006) bereits in E.T.A. Hoffmanns „Prinzeß Brambilla“ (1820), wo es um den chiastischen Austausch von Personen geht



2. Während sich die semiotischen CAs als einfache Dualsysteme darstellen lassen, benötigen die ihnen zugrunde liegenden kategorietheoretischen Strukturen chiastische Relationen.

2.1. R = (0, 00, 01, 000)

$(\gamma \to \beta^\circ\gamma^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \quad \times \quad (\gamma\beta \to \gamma^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ$

$((01 \to 000) \to (000 \to 00)) \to (000 \to 0)$

$((00 \to 000) \to (000 \to 01)) \to (000 \to 0)$

$(\beta \to \gamma) \to \alpha^\circ\beta^\circ$ $\times$ $(\gamma^\circ \to \beta^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ$

$((00 \to 01) \to (01 \to 000)) \to (01 \to 0)$

$((000 \to 01) \to (01 \to 00)) \to (01 \to 0)$

$(\gamma\beta\alpha \to \gamma^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ$ $\times$ $(\gamma \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ$

$((0 \to 000) \to (000 \to 01)) \to (000 \to 00)$

$((01 \to 000) \to (000 \to 0)) \to (000 \to 00)$

$(\beta\alpha \to \gamma) \to \beta^\circ$ $\times$ $(\gamma^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ) \to \beta^\circ$

$((0 \to 01) \to (01 \to 000)) \to (01 \to 00)$

$((000 \to 01) \to (01 \to 0)) \to (01 \to 00)$

$(\beta^\circ \to \gamma\beta) \to \alpha^\circ$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ \to \beta) \to \alpha^\circ$

$((01 \to 00) \to (00 \to 000)) \to (00 \to 0)$

$((000 \to 00) \to (00 \to 01)) \to (00 \to 0)$

$(\alpha^\circ \to \gamma\beta\alpha) \to \beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \to \alpha) \to \beta\alpha$

$((00 \to 0) \to (0 \to 000)) \to (0 \to 01)$

$((000 \to 0) \to (0 \to 00)) \to (0 \to 01)$

$(\alpha \to \gamma\beta) \to \beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ \to \alpha^\circ) \to \beta$

$((0 \to 00) \to (00 \to 000)) \to (00 \to 01)$

$((000 \to 00) \to (00 \to 0)) \to (00 \to 01)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ \to \gamma\beta\alpha) \to \alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \to \beta\alpha) \to \alpha$

$((01 \to 0) \to (0 \to 000)) \to (0 \to 00)$

$((000 \to 0) \to (0 \to 01)) \to (0 \to 00)$

$(\alpha^\circ \to \beta\alpha) \to \gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ \to \alpha) \to \gamma\beta\alpha$

$((00 \to 0) \to (0 \to 01)) \to (0 \to 000)$

$((01 \to 0) \to (0 \to 00)) \to (0 \to 000)$

$(\alpha \to \beta) \to \gamma\beta$ $\times$ $(\beta^\circ \to \alpha^\circ) \to \gamma\beta$

$((0 \to 00) \to (00 \to 01)) \to (00 \to 000)$

$((01 \to 00) \to (00 \to 0)) \to (00 \to 000)$

$(\gamma\beta\alpha \to \beta^\circ\gamma^\circ) \to \gamma^\circ$ $\times$ $(\gamma\beta \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \to \gamma^\circ$

$((0 \to 000) \to (000 \to 00)) \to (000 \to 01)$

$((00 \to 000) \to (000 \to 0)) \to (000 \to 01)$

$(\beta\alpha \to \beta^\circ) \to \gamma$ $\times$ $(\beta \to \alpha^\circ\beta^\circ) \to \gamma$

$((0 \to 01) \to (01 \to 00)) \to (01 \to 000)$

$((00 \to 01) \to (01 \to 0)) \to (01 \to 000)$

2.2. $R = (0, 00, 01, 001)$

$(\delta\gamma\beta \to \gamma^\circ\delta^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$ $\times$ $(\delta\gamma \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$

$((00 \to 001) \to (001 \to 01)) \to (012 \to 0)$

$((01 \to 001) \to (001 \to 00)) \to (012 \to 0)$

$(\beta \to \delta\gamma) \to \alpha^\circ\beta^\circ$ $\times$ $(\gamma^\circ\delta^\circ \to \beta^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ$

$((00 \to 01) \to (01 \to 001)) \to (01 \to 0)$

$((001 \to 01) \to (01 \to 00)) \to (01 \to 0)$

$(\beta^\circ \to \delta\gamma\beta) \to \alpha^\circ$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \beta) \to \alpha^\circ$

$((01 \to 00) \to (00 \to 001)) \to (00 \to 0)$

$((001 \to 00) \to (00 \to 01)) \to (00 \to 0)$

$(\delta\gamma\beta\alpha \to \gamma^\circ\delta^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$ $\times$ $(\delta\gamma \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$

$((0 \to 001) \to (001 \to 01)) \to (001 \to 00)$

$((01 \to 001) \to (001 \to 0)) \to (001 \to 00)$

$(\beta\alpha \to \delta\gamma) \to \beta^\circ$ $\times$ $(\gamma^\circ\delta^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ) \to \beta^\circ$

$((0 \to 01) \to (01 \to 001)) \to (01 \to 00)$

$((001 \to 01) \to (01 \to 0)) \to (01 \to 00)$

$(\delta\gamma\beta\alpha \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ$ $\times$ $(\delta\gamma\beta \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ$

$((0 \to 001) \to (001 \to 00)) \to (001 \to 01)$

$((00 \to 001) \to (001 \to 0)) \to (001 \to 01)$

$(\alpha^\circ \to \delta\gamma\beta\alpha) \to \beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \alpha) \to \beta\alpha$

$((00 \to 0) \to (0 \to 001)) \to (0 \to 01)$

$((001 \to 0) \to (0 \to 00)) \to (0 \to 01)$

$(\alpha \to \delta\gamma\beta) \to \beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \alpha^\circ) \to \beta$

$((0 \to 00) \to (00 \to 001)) \to (00 \to 01)$

$((001 \to 00) \to (00 \to 0)) \to (00 \to 01)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ \to \delta\gamma\beta\alpha) \to \alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \beta\alpha) \to \alpha$

$((01 \to 0) \to (0 \to 001)) \to (0 \to 00)$

$((001 \to 0) \to (0 \to 01)) \to (0 \to 00)$

$(\alpha^\circ \to \beta\alpha) \to \delta\gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ \to \alpha) \to \delta\gamma\beta\alpha$

$((00 \to 0) \to (0 \to 01)) \to (0 \to 001)$

$((01 \to 0) \to (0 \to 00)) \to (0 \to 001)$

$(\alpha \to \beta) \to \delta\gamma\beta$ $\times$ $(\beta^\circ \to \alpha^\circ) \to \delta\gamma\beta$

$((0 \to 00) \to (00 \to 01)) \to (00 \to 001)$

$((01 \to 00) \to (00 \to 0)) \to (00 \to 001)$

$(\beta\alpha \to \beta^\circ) \to \delta\gamma$ $\times$ $(\beta \to \alpha^\circ\beta^\circ) \to \delta\gamma$

$((0 \to 01) \to (01 \to 00)) \to (01 \to 001)$

$((00 \to 01) \to (01 \to 0)) \to (01 \to 001)$

2.3. $R = (0, 00, 01, 012)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon\delta\gamma \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((0 \to 012) \to (012 \to 01)) \to (012 \to 01)$

$((01 \to 012) \to (012 \to 0)) \to (012 \to 01)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon\delta\gamma \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((0 \to 012) \to (012 \to 01)) \to (012 \to 00)$

$((01 \to 012) \to (012 \to 0)) \to (012 \to 00)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon\delta\gamma \to \beta^\circ\gamma\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((00 \to 012) \to (012 \to 01)) \to (012 \to 01)$

$((01 \to 012) \to (012 \to 00)) \to (012 \to 01)$

$(\beta \to \varepsilon\delta\gamma) \to \alpha^\circ\beta^\circ$ $\times$ $(\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \beta^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ$

$((00 \to 01) \to (01 \to 012)) \to (01 \to 0)$

$((012 \to 01) \to (01 \to 00)) \to (01 \to 0)$

$(\beta\alpha \to \varepsilon\delta\gamma) \to \beta^\circ$ $\times$ $(\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ) \to \beta^\circ$

$((0 \to 01) \to (01 \to 012)) \to (01 \to 00)$

$((012 \to 01) \to (01 \to 0)) \to (01 \to 00)$

$(\beta^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta) \to \alpha^\circ$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \beta) \to \alpha^\circ$

$((01 \to 00) \to (00 \to 012)) \to (00 \to 0)$

$((012 \to 00) \to (00 \to 01)) \to (00 \to 0)$

$(\alpha^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta) \to \beta\alpha$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \alpha) \to \beta\alpha$

$((00 \to 0) \to (0 \to 012)) \to (0 \to 01)$

$((012 \to 0) \to (0 \to 00)) \to (0 \to 01)$

$(\alpha \to \varepsilon\delta\gamma\beta) \to \beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \alpha^\circ) \to \beta$

$((0 \to 00) \to (00 \to 012)) \to (00 \to 01)$

$((012 \to 00) \to (00 \to 0)) \to (00 \to 01)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \to \alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \beta\alpha) \to \alpha$

$((01 \to 0) \to (0 \to 012)) \to (0 \to 00)$

$((012 \to 0) \to (0 \to 01)) \to (0 \to 00)$

$(\alpha^\circ \to \beta\alpha) \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ \to \alpha) \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$

$((00 \to 0) \to (0 \to 01)) \to (0 \to 012)$

$((01 \to 0) \to (0 \to 00)) \to (0 \to 012)$

$(\alpha \to \beta) \to \delta\gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\beta^\circ \to \alpha^\circ) \to \delta\gamma\beta\alpha$

$((0 \to 00) \to (00 \to 01)) \to (00 \to 001)$

$((01 \to 00) \to (00 \to 0)) \to (00 \to 001)$

$(\beta\alpha \to \beta^\circ) \to \varepsilon\delta\gamma$ $\times$ $(\beta \to \alpha^\circ\beta^\circ) \to \varepsilon\delta\gamma$

$((0 \to 01) \to 01 \to 00)) \to (01 \to 012)$

$((00 \to 01) \to (01 \to 0)) \to (01 \to 012)$

2.4. $R = (0, 00, 000, 001)$

$(\delta\gamma\beta \to \delta^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$ $\times$ $(\delta \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$

$((00 \to 001) \to (001 \to 000)) \to (012 \to 0)$

$((000 \to 001) \to (001 \to 00)) \to (012 \to 0)$

$(\gamma\beta \to \delta) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ$ $\times$ $(\delta^\circ \to \beta^\circ\gamma^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ$

$((00 \to 000) \to (000 \to 001)) \to (000 \to 0)$

$((001 \to 000) \to (000 \to 00)) \to (000 \to 0)$

$(\delta\gamma\beta\alpha \to \delta^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$ $\times$ $(\delta \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$

$((0 \to 001) \to (001 \to 000)) \to (001 \to 00)$

$((000 \to 001) \to (001 \to 0)) \to (001 \to 00)$

$(\gamma\beta\alpha \to \delta) \to \beta^\circ\gamma^\circ$ $\times$ $(\delta^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ$

$((0 \to 000) \to (000 \to 001)) \to (000 \to 00)$

$((001 \to 000) \to (000 \to 0)) \to (000 \to 00)$

$(\beta^\circ\gamma^\circ \to \delta\gamma\beta) \to \alpha^\circ$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \gamma\beta) \to \alpha^\circ$

$((000 \to 00) \to (00 \to 001)) \to (00 \to 0)$

$((001 \to 00) \to (00 \to 000)) \to (00 \to 0)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \to \delta\gamma\beta\alpha) \to \alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \gamma\beta\alpha) \to \alpha$

$((000 \to 0) \to (0 \to 001)) \to (0 \to 00)$

$((001 \to 0) \to (0 \to 000)) \to (0 \to 00)$

$(\alpha^\circ \to \gamma\beta\alpha) \to \delta\gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \to \alpha) \to \delta\gamma\beta\alpha$

$((00 \to 0) \to (0 \to 000)) \to (0 \to 001)$

$(000 \to 0) \to (0 \to 00)) \to (0 \to 001)$

$(\alpha \to \gamma\beta) \to \delta\gamma\beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ \to \alpha^\circ) \to \delta\gamma\beta$

$((0 \to 00) \to (00 \to 000)) \to (00 \to 000)$

$((000 \to 00) \to (00 \to 0)) \to (00 \to 000)$

$(\alpha^\circ \to \delta\gamma\beta\alpha) \to \gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \alpha) \to \gamma\beta\alpha$

$((00 \to 0) \to (0 \to 001)) \to (0 \to 000)$

$((001 \to 0) \to (0 \to 00)) \to (0 \to 000)$

$(\alpha \to \delta\gamma\beta) \to \gamma\beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \alpha^\circ) \to \gamma\beta$

$((0 \to 00) \to (00 \to 001)) \to (00 \to 000)$

$((001 \to 00) \to (00 \to 0)) \to (00 \to 000)$

$(\delta\gamma\beta\alpha \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \delta^\circ$ $\times$ $(\delta\gamma\beta \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \delta^\circ$

$((0 \to 001) \to (001 \to 00)) \to (001 \to 000)$

$((00 \to 001) \to (001 \to 0)) \to (001 \to 000)$

$(\gamma\beta\alpha \to \beta^\circ\gamma^\circ) \to \delta$ $\times$ $(\gamma\beta \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \to \delta$

$((0 \to 000) \to (000 \to 00)) \to (000 \to 001)$

$((00 \to 000) \to (000 \to 0)) \to (000 \to 001)$

2.5. $R = (0, 00, 000, 012)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta \to \delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon\delta \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((00 \to 012) \to (012 \to 000)) \to (012 \to 0)$

$((000 \to 012) \to (012 \to 00)) \to (012 \to 0)$

$(\gamma\beta \to \varepsilon\delta) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ$ $\times$ $(\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \beta^\circ\gamma^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ$

$((00 \to 000) \to (000 \to 012)) \to (000 \to 0)$

$((012 \to 000) \to (000 \to 00)) \to (000 \to 0)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \to \delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon\delta \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((012 \to 0) \to (012 \to 000)) \to (012 \to 00)$

$((000 \to 012) \to (012 \to 0)) \to (012 \to 00)$

$(\gamma\beta\alpha \to \varepsilon\delta) \to \beta^\circ\gamma^\circ$ $\times$ $(\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ$

$((0 \to 000) \to (000 \to 012)) \to (000 \to 00)$

$((012 \to 000) \to (000 \to 0)) \to (000 \to 00)$

$(\beta^\circ\gamma^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta) \to \alpha^\circ$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \gamma\beta) \to \alpha^\circ$

$((000 \to 00) \to (00 \to 012)) \to (00 \to 0)$

$((012 \to 00) \to (00 \to 000)) \to (00 \to 0)$

$(\alpha^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \to \gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \alpha) \to \gamma\beta\alpha$

$((00 \to 0) \to (0 \to 012)) \to (000 \to 0)$

$((012 \to 0) \to (0 \to 00)) \to (000 \to 0)$

$(\alpha \to \varepsilon\delta\gamma\beta) \to \gamma\beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \alpha^\circ) \to \gamma\beta$

$((0 \to 00) \to (00 \to 012)) \to (00 \to 000)$

$((012 \to 00) \to (00 \to 0)) \to (00 \to 000)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \to \alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \gamma\beta\alpha) \to \alpha$

$((000 \to 0) \to (0 \to 012)) \to (0 \to 00)$

$((012 \to 0) \to (000 \to 0)) \to (0 \to 00)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon\delta\gamma\beta \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((0 \to 012) \to (012 \to 00)) \to (012 \to 000)$

$((00 \to 012) \to (012 \to 0)) \to (012 \to 000)$

$(\alpha^\circ \to \gamma\beta\alpha) \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \to \alpha) \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$

$((00 \to 0) \to (0 \to 000)) \to (0 \to 012)$

$((000 \to 0) \to (0 \to 00)) \to (0 \to 012)$

$(\alpha, \gamma\beta) \to \varepsilon\delta\gamma\beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ \to \alpha^\circ) \to \varepsilon\delta\gamma\beta$

$((0 \to 00) \to (00 \to 000)) \to (00 \to 012)$

$((000 \to 00) \to (00 \to 0)) \to (00 \to 012)$

$(\gamma\beta\alpha \to \beta^\circ\gamma^\circ) \to \varepsilon\delta$ $\times$ $(\gamma\beta \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \to \varepsilon\delta$

$((0 \to 000) \to (000 \to 00)) \to (000 \to 012)$

$((00 \to 000) \to (000 \to 0)) \to (000 \to 012)$

2.6. $R = (0, 00, 001, 012)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta \to \varepsilon^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((00 \to 012) \to (012 \to 001)) \to (012 \to 0)$

$((001 \to 012) \to (012 \to 00)) \to (012 \to 0)$

$(\delta\gamma\beta \to \varepsilon) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$ $\times$ $(\varepsilon^\circ \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$

$((00 \to 001) \to (001 \to 012)) \to (001 \to 0)$

$((012 \to 001) \to (001 \to 00)) \to (001 \to 0)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \to \varepsilon^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((0 \to 012) \to (012 \to 001)) \to (012 \to 00)$

$((001 \to 012) \to (012 \to 0)) \to (012 \to 00)$

$(\delta\gamma\beta\alpha \to \varepsilon) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$ $\times$ $(\varepsilon^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$

$((0 \to 001) \to (001 \to 012)) \to (001 \to 00)$

$((012 \to 001) \to (001 \to 0)) \to (001 \to 00)$

$(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta) \to \alpha^\circ$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \delta\gamma\beta) \to \alpha^\circ$

$((001 \to 00) \to (00 \to 012)) \to (00 \to 0)$

$((012 \to 00) \to (00 \to 001)) \to (00 \to 0)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \to \alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \delta\gamma\beta\alpha) \to \alpha$

$((001 \to 0) \to (0 \to 012)) \to (0 \to 00)$

$((012 \to 0) \to (0 \to 001)) \to (0 \to 00)$

$(\alpha^\circ \to \delta\gamma\beta\alpha) \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \alpha) \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$

$((00 \to 0) \to (0 \to 001)) \to (0 \to 012)$

$((001 \to 0) \to (0 \to 00)) \to (0 \to 012)$

$(\alpha \to \delta\gamma\beta) \to \varepsilon\delta\gamma\beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \alpha^\circ) \to \varepsilon\delta\gamma\beta$

$((0 \to 00) \to (00 \to 001)) \to (00 \to 012)$

$((001 \to 00) \to (00 \to 0)) \to (00 \to 012)$

$(\alpha^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \to \delta\gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \alpha) \to \delta\gamma\beta\alpha$

$((00 \to 0) \to (0 \to 012)) \to (0 \to 001)$

$((012 \to 0) \to (0 \to 00)) \to (0 \to 001)$

$(\alpha \to \varepsilon\delta\gamma\beta) \to \delta\gamma\beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \alpha^\circ) \to \delta\gamma\beta$

$((0 \to 00) \to (00 \to 012)) \to (00 \to 001)$

$((012 \to 00) \to (00 \to 0)) \to (00 \to 001)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon\delta\gamma\beta \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \varepsilon^\circ$

$((0 \to 012) \to (012 \to 00)) \to (012 \to 001)$

$((00 \to 012) \to (012 \to 0)) \to (012 \to 001)$

$(\delta\gamma\beta\alpha \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \varepsilon$ $\times$ $(\delta\gamma\beta \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \varepsilon$

$((0 \to 001) \to (001 \to 00)) \to (001 \to 012)$

$((00 \to 001) \to (001 \to 0)) \to (001 \to 012)$

2.7. $R = (0, 01, 000, 001)$

$(\delta\gamma \to \delta^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$ $\times$ $(\delta \to \gamma^\circ\delta^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$

$((01 \to 001) \to (001 \to 000)) \to (001 \to 0)$

$((000 \to 001) \to (001 \to 01)) \to (001 \to 0)$

$(\gamma \to \delta) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \qquad \times \qquad (\delta^\circ \to \gamma^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ$

$((01 \to 000) \to (000 \to 001)) \to (000 \to 0)$

$((001 \to 000) \to (000 \to 01)) \to (000 \to 0)$

$(\gamma \to \delta\gamma) \to \alpha^\circ\beta^\circ \qquad \times \qquad (\gamma^\circ\delta^\circ \to \gamma) \to \alpha^\circ\beta^\circ$

$((01 \to 000) \to (01 \to 001)) \to (01 \to 0)$

$((001 \to 01) \to (000 \to 01)) \to (01 \to 0)$

$(\delta\gamma\beta\alpha \to \delta^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ \qquad \times \qquad (\delta \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ$

$((0 \to 001) \to (001 \to 000)) \to (001 \to 01)$

$((000 \to 001) \to (001 \to 0)) \to (001 \to 01)$

$(\gamma\beta\alpha \to \delta) \to \gamma^\circ \qquad \times \qquad (\delta^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \to \gamma^\circ$

$((0 \to 000) \to (000 \to 001)) \to (001 \to 01)$

$((001 \to 000) \to (000 \to 0)) \to (001 \to 01)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ \to \gamma\beta\alpha) \to \delta\gamma\beta\alpha \qquad \times \qquad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \to \beta\alpha) \to \delta\gamma\beta\alpha$

$((01 \to 00) \to (0 \to 000)) \to (0 \to 001)$

$((000 \to 0) \to (00 \to 01)) \to (0 \to 001)$

$(\beta\alpha \to \gamma) \to \delta\gamma \qquad \times \qquad (\gamma^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ) \to \delta\gamma$

$((0 \to 01) \to (01 \to 000)) \to (01 \to 000)$

$((000 \to 01) \to (01 \to 0)) \to (01 \to 000)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \beta\alpha) \to \gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ \to \delta\gamma\beta\alpha) \to \gamma\beta\alpha$

$((001 \to 0) \to (0 \to 01)) \to (0 \to 000)$

$((01 \to 0) \to (0 \to 001)) \to (0 \to 000)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \to \delta\gamma\beta\alpha) \to \beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \gamma\beta\alpha) \to \beta\alpha$

$((000 \to 0) \to (0 \to 001)) \to (0 \to 01)$

$((001 \to 0) \to (0 \to 000)) \to (0 \to 01)$

$(\beta\alpha \to \delta\gamma) \to \gamma$ $\times$ $(\gamma^\circ\delta^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ) \to \gamma$

$((0 \to 01) \to (01 \to 001)) \to (01 \to 000)$

$((001 \to 01) \to (01 \to 0)) \to (01 \to 000)$

$(\delta\gamma\beta\alpha \to \gamma^\circ\delta^\circ) \to \delta^\circ$ $\times$ $(\delta\gamma \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \delta^\circ$

$((0 \to 001) \to (001 \to 01)) \to (001 \to 000)$

$((01 \to 001) \to (001 \to 0)) \to (001 \to 000)$

$(\gamma\beta\alpha \to \gamma^\circ) \to \delta$ $\times$ $(\gamma \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \to \delta$

$((0 \to 000) \to (000 \to 01)) \to (000 \to 001)$

$((01 \to 000) \to (000 \to 0)) \to (000 \to 001)$

2.8. $R = (0, 01, 000, 012)$

$(\varepsilon\delta\gamma \to \delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon\delta \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((01 \to 012) \to (012 \to 000)) \to (012 \to 0)$

$((000 \to 012) \to (012 \to 01)) \to (012 \to 0)$

$(\gamma \to \varepsilon\delta) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \qquad \times \qquad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \gamma^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ$

$((01 \to 000) \to (000 \to 012)) \to (000 \to 0)$

$((012 \to 000) \to (000 \to 01)) \to (000 \to 0)$

$(\gamma^\circ \to \varepsilon\delta\gamma) \to \alpha^\circ\beta^\circ \qquad \times \qquad (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \gamma) \to \alpha^\circ\beta^\circ$

$((01 \to 000) \to (01 \to 012)) \to (01 \to 0)$

$((012 \to 01) \to (01 \to 000)) \to (01 \to 0)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \to \delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon \qquad \times \qquad (\varepsilon\delta \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((0 \to 012) \to (012 \to 000)) \to (012 \to 01)$

$((000 \to 012) \to (012 \to 0)) \to (012 \to 01)$

$(\gamma\beta\alpha \to \varepsilon\delta) \to \gamma^\circ \qquad \times \qquad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \to \gamma^\circ$

$((0 \to 000) \to (000 \to 012)) \to (000 \to 01)$

$((012 \to 000) \to (000 \to 0)) \to (000 \to 01)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ \to \varepsilon\delta) \to \gamma\beta\alpha \qquad \times \qquad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \beta\alpha) \to \gamma\beta\alpha$

$((01 \to 0) \to (000 \to 012)) \to (0 \to 000)$

$((012 \to 000) \to (0 \to 01)) \to (0 \to 000)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \to \beta\alpha \qquad \times \qquad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \gamma\beta\alpha) \to \beta\alpha$

$((000 \to 0) \to (0 \to 012)) \to (01 \to 0)$

$((012 \to 0) \to (0 \to 000)) \to (01 \to 0)$

$(\beta\alpha \to \varepsilon\delta\gamma) \to \gamma$ $\times$ $(\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ) \to \gamma$

$((0 \to 01) \to (01 \to 012)) \to (01 \to 000)$

$((012 \to 01) \to (01 \to 0)) \to (01 \to 000)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon\delta\gamma \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((0 \to 012) \to (012 \to 01)) \to (012 \to 000)$

$((01 \to 012) \to (012 \to 0)) \to (012 \to 000)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ \to \gamma\beta\alpha) \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \to \beta\alpha) \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$

$((01 \to 0) \to (0 \to 000)) \to (0 \to 012)$

$((000 \to 0) \to (0 \to 01)) \to (0 \to 012)$

$(\beta\alpha \to \gamma^\circ) \to \varepsilon\delta\gamma$ $\times$ $(\gamma \to \alpha^\circ\beta^\circ) \to \varepsilon\delta\gamma$

$((0 \to 01) \to (000 \to 01)) \to (01 \to 012)$

$((01 \to 000) \to (01 \to 0)) \to (01 \to 012)$

$(\gamma\beta\alpha \to \gamma^\circ) \to \varepsilon\delta$ $\times$ $(\gamma \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \to \varepsilon\delta$

$((0 \to 000) \to (000 \to 01)) \to (000 \to 012)$

$((01 \to 000) \to (000 \to 0)) \to (000 \to 012)$

2.9. $R = (0, 01, 001, 012)$

$(\varepsilon\delta\gamma \to \varepsilon^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((01 \to 012) \to (012 \to 001)) \to (012 \to 01)$

$((001 \to 012) \to (012 \to 01)) \to (012 \to 01)$

$(\delta\gamma \to \varepsilon) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$ $\times$ $(\varepsilon^\circ \to \gamma^\circ\delta^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$

$((01 \to 001) \to (001 \to 012)) \to (012 \to 0)$

$((012 \to 001) \to (001 \to 01)) \to (012 \to 0)$

$(\gamma^\circ\delta^\circ \to \varepsilon\delta\gamma) \to \alpha^\circ\beta^\circ$ $\times$ $(\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \delta\gamma) \to \alpha^\circ\beta^\circ$

$((001 \to 01) \to (01 \to 012)) \to (000 \to 0)$

$((012 \to 01) \to (01 \to 001)) \to (000 \to 0)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \to \varepsilon^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((001 \to 012) \to (012 \to 001)) \to (012 \to 01)$

$((001 \to 012) \to (012 \to 001)) \to (012 \to 01)$

$(\delta\gamma\beta\alpha \to \varepsilon) \to \gamma^\circ\delta^\circ$ $\times$ $(\varepsilon^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ$

$((0 \to 001) \to (001 \to 012)) \to (001 \to 01)$

$((012 \to 001) \to (001 \to 0)) \to (001 \to 01)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon\delta\gamma \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \varepsilon^\circ$

$((0 \to 012) \to (012 \to 01)) \to (012 \to 001)$

$((01 \to 012) \to (012 \to 0)) \to (012 \to 001)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ \to \delta\gamma\beta\alpha) \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \beta\alpha) \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$

$((01 \to 0) \to (0 \to 001)) \to (0 \to 012)$

$((001 \to 0) \to (0 \to 01)) \to (0 \to 012)$

$(\beta\alpha \to \delta\gamma) \to \varepsilon\delta\gamma$ $\times$ $(\gamma^\circ\delta^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ) \to \varepsilon\delta\gamma$

$((0 \to 01) \to (01 \to 001)) \to (01 \to 012)$

$((001 \to 01) \to (01 \to 0)) \to (01 \to 012)$

$(\beta\alpha \to \varepsilon\delta\gamma) \to \delta\gamma$ $\times$ $(\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ) \to \delta\gamma$

$((0 \to 01) \to (01 \to 012)) \to (01 \to 001)$

$((012 \to 01) \to (01 \to 0)) \to (01 \to 001)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \to \delta\gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \beta\alpha) \to \delta\gamma\beta\alpha$

$((01 \to 0) \to (0 \to 012)) \to (0 \to 001)$

$((012 \to 0) \to (0 \to 01)) \to (0 \to 001)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \to \beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \delta\gamma\beta\alpha) \to \beta\alpha$

$((001 \to 0) \to (0 \to 012)) \to (01 \to 0)$

$((012 \to 0) \to (0 \to 001)) \to (01 \to 0)$

$(\delta\gamma\beta\alpha \to \gamma^\circ\delta^\circ) \to \varepsilon$ $\times$ $(\delta\gamma \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \varepsilon$

$((0 \to 001) \to (001 \to 01)) \to (001 \to 012)$

$((01 \to 001) \to (001 \to 0)) \to (001 \to 012)$

2.10. $R = (0, 000, 001, 012)$

$(\varepsilon\delta \to \varepsilon^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon \to \delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((000 \to 012) \to (012 \to 001)) \to (012 \to 0)$

$((001 \to 012) \to (012 \to 000)) \to (012 \to 0)$

$(\delta \to \varepsilon) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$ $\times$ $(\varepsilon^\circ \to \delta^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$

$((000 \to 001) \to (001 \to 012)) \to (012 \to 0)$

$((012 \to 001) \to (001 \to 000)) \to (012 \to 0)$

$(\delta \to \varepsilon\delta) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ$ $\times$ $(\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \delta^\circ) \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ$

$((000 \to 001) \to (000 \to 012)) \to (000 \to 0)$

$((012 \to 000) \to (001 \to 000)) \to (000 \to 0)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \to \varepsilon^\circ) \to \delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((0 \to 012) \to (012 \to 001)) \to (012 \to 000)$

$((001 \to 012) \to (012 \to 0)) \to (012 \to 000)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \to \varepsilon^\circ) \to \delta^\circ$ $\times$ $(\varepsilon^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \delta^\circ$

$((0 \to 012) \to (012 \to 001)) \to (001 \to 000)$

$((012 \to 001) \to (012 \to 0)) \to (001 \to 000)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \to \delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon\delta \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \varepsilon^\circ$

$((0 \to 012) \to (012 \to 000)) \to (012 \to 001)$

$((000 \to 012) \to (012 \to 0)) \to (012 \to 001)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \to \delta\gamma\beta\alpha) \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \gamma\beta\alpha) \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$

$((000 \to 0) \to (0 \to 001)) \to (0 \to 012)$

$((001 \to 0) \to (0 \to 000)) \to (0 \to 012)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \to \delta\gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \gamma\beta\alpha) \to \delta\gamma\beta\alpha$

$((000 \to 0) \to (0 \to 012)) \to (0 \to 001)$

$((012 \to 0) \to (0 \to 000)) \to (0 \to 001)$

$(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \to \gamma\beta\alpha$ $\times$ $(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \delta\gamma\beta\alpha) \to \gamma\beta\alpha$

$((001 \to 0) \to (0 \to 012)) \to (0 \to 000)$

$((012 \to 0) \to (0 \to 001)) \to (0 \to 000)$

$(\gamma\beta\alpha \to \delta) \to \varepsilon\delta$ $\times$ $(\delta^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \to \varepsilon\delta$

$((0 \to 000) \to (000 \to 001)) \to (000 \to 012)$

$((001 \to 000) \to (000 \to 0)) \to (000 \to 012)$

$(\gamma\beta\alpha \to \varepsilon\delta) \to \delta$ $\times$ $(\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \to \delta$

$((0 \to 000) \to (000 \to 012)) \to (000 \to 001)$

$((012 \to 000) \to (000 \to 0)) \to (000 \to 001)$

$(\delta\gamma\beta\alpha \to \delta^\circ) \to \varepsilon$ $\times$ $(\delta \to \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \varepsilon$

$((0 \to 001) \to (001 \to 000)) \to (001 \to 012)$

$((000 \to 001) \to (001 \to 0)) \to (001 \to 012)$

2.11. $R = (00, 01, 000, 001)$

$(\delta\gamma \to \delta^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$ $\times$ $(\delta \to \gamma^\circ\delta^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$

$((01 \to 001) \to (001 \to 000)) \to (001 \to 00)$

$((000 \to 001) \to (001 \to 01)) \to (001 \to 01)$

$(\gamma \to \delta) \to \beta^\circ\gamma^\circ \qquad \times \qquad (\delta^\circ \to \gamma^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ$

$((01 \to 000) \to (000 \to 001)) \to (000 \to 00)$

$(001 \to 000) \to (000 \to 01)) \to (000 \to 00)$

$(\gamma^\circ \to \delta\gamma) \to \beta^\circ \qquad \times \qquad (\gamma^\circ\delta^\circ \to \gamma) \to \beta^\circ$

$((000 \to 01) \to (01 \to 001)) \to (01 \to 00)$

$((001 \to 01) \to (01 \to 000)) \to (01 \to 00)$

$(\delta\gamma\beta \to \delta^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ \qquad \times \qquad (\delta \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ$

$((00 \to 001) \to (001 \to 000)) \to (001 \to 01)$

$((000 \to 001) \to (001 \to 00)) \to (001 \to 01)$

$(\gamma\beta \to \delta) \to \gamma^\circ \qquad \times \qquad (\delta^\circ \to \beta^\circ\gamma^\circ) \to \gamma^\circ$

$((00 \to 000) \to (000 \to 001)) \to (000 \to 01)$

$((001 \to 000) \to (000 \to 00)) \to (000 \to 01)$

$(\delta\gamma\beta \to \gamma^\circ\delta^\circ) \to \delta^\circ \qquad \times \qquad (\delta\gamma \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \delta^\circ$

$((00 \to 001) \to (001 \to 01)) \to (001 \to 000)$

$((01 \to 001) \to (001 \to 00)) \to (001 \to 000)$

$(\beta^\circ \to \gamma\beta) \to \delta\gamma\beta \qquad \times \qquad (\beta^\circ\gamma^\circ \to \beta) \to \delta\gamma\beta$

$((01 \to 00) \to (00 \to 000)) \to (00 \to 001)$

$((000 \to 00) \to (00 \to 01)) \to (00 \to 001)$

$(\beta \to \gamma) \to \delta\gamma$ $\times$ $(\gamma^\circ \to \beta^\circ) \to \delta\gamma$

$((00 \to 01) \to (01 \to 000)) \to (01 \to 001)$

$((000 \to 01) \to (01 \to 00)) \to (01 \to 001)$

$(\beta^\circ \to \delta\gamma\beta) \to \gamma\beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \beta) \to \gamma\beta$

$((01 \to 00) \to (00 \to 001)) \to (00 \to 000)$

$((001 \to 00) \to (00 \to 01)) \to (00 \to 000)$

$(\gamma\beta \to \gamma^\circ) \to \delta$ $\times$ $(\gamma \to \beta^\circ\gamma^\circ) \to \delta$

$((00 \to 000) \to (000 \to 01)) \to (000 \to 001)$

$((01 \to 000) \to (000 \to 00)) \to (000 \to 001)$

$(\beta \to \delta\gamma) \to \gamma$ $\times$ $(\gamma^\circ\delta^\circ \to \beta^\circ) \to \gamma$

$((00 \to 01) \to (01 \to 001)) \to (01 \to 000)$

$((001 \to 01) \to (01 \to 00)) \to (01 \to 000)$

$(\beta^\circ\gamma^\circ \to \delta\gamma\beta) \to \beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \gamma\beta) \to \beta$

$((000 \to 00) \to (00 \to 001)) \to (00 \to 01)$

$((001 \to 00) \to (00 \to 000)) \to (00 \to 01)$

2.12. $R = (00, 01, 000, 012)$

$(\varepsilon\delta\gamma \to \delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon\delta \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((01 \to 012) \to (012 \to 000)) \to (012 \to 00)$

$((000 \to 012) \to (012 \to 01)) \to (012 \to 00)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta \to \delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon\delta \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((00 \to 012) \to (012 \to 000)) \to (012 \to 01)$

$((000 \to 012) \to (012 \to 00)) \to (012 \to 01)$

$(\gamma \to \varepsilon\delta) \to \beta^\circ\gamma^\circ$ $\times$ $(\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \gamma^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ$

$((01 \to 000) \to (000 \to 012)) \to (000 \to 00)$

$((012 \to 000) \to (000 \to 01)) \to (000 \to 00)$

$(\gamma^\circ \to \varepsilon\delta\gamma) \to \beta^\circ$ $\times$ $(\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \gamma) \to \beta^\circ$

$((000 \to 01) \to (01 \to 012)) \to (01 \to 00)$

$((012 \to 01) \to (01 \to 000)) \to (01 \to 00)$

$(\gamma\beta \to \varepsilon\delta) \to \gamma^\circ$ $\times$ $(\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \beta^\circ\gamma^\circ) \to \gamma^\circ$

$((00 \to 000) \to (000 \to 012)) \to (000 \to 01)$

$((012 \to 000) \to (000 \to 00)) \to (000 \to 01)$

$(\beta^\circ \to \gamma\beta) \to \varepsilon\delta\gamma\beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ \to \beta) \to \varepsilon\delta\gamma\beta$

$((01 \to 00) \to (00 \to 000)) \to (00 \to 012)$

$((000 \to 00) \to (00 \to 01)) \to (00 \to 012)$

$(\beta \to \gamma) \to \varepsilon\delta\gamma$ $\times$ $(\gamma^\circ \to \beta^\circ) \to \varepsilon\delta\gamma$

$((00 \to 01) \to (01 \to 000)) \to (01 \to 012)$

$((000 \to 01) \to (01 \to 00)) \to (01 \to 012)$

$(\beta^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta) \to \gamma\beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \beta) \to \gamma\beta$

$((01 \to 00) \to (00 \to 012)) \to (00 \to 000)$

$((012 \to 00) \to (00 \to 01)) \to (00 \to 000)$

$(\beta \to \varepsilon\delta\gamma) \to \gamma$ $\times$ $(\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \beta^\circ) \to \gamma$

$((00 \to 01) \to (01 \to 012)) \to (01 \to 000)$

$((012 \to 01) \to (01 \to 00)) \to (000 \to 01)$

$(\beta^\circ\gamma^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta) \to \beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \gamma\beta) \to \beta$

$((000 \to 00) \to (00 \to 012)) \to (00 \to 01)$

$((012 \to 00) \to (00 \to 000)) \to (00 \to 01)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon\delta\gamma \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((00 \to 012) \to (012 \to 01)) \to (012 \to 000)$

$((01 \to 012) \to (012 \to 00)) \to (012 \to 000)$

$(\gamma\beta \to \gamma^\circ) \to \varepsilon\delta$ $\times$ $(\gamma \to \beta^\circ\gamma^\circ) \to \varepsilon\delta$

$((00 \to 000) \to (000 \to 01)) \to (000 \to 012)$

$((01 \to 000) \to (000 \to 00)) \to (000 \to 012)$

2.13. $R = (00, 01, 001, 012)$

$(\varepsilon\delta\gamma \to \varepsilon^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((01 \to 012) \to (012 \to 001)) \to (012 \to 01)$

$((001 \to 012) \to (012 \to 01)) \to (012 \to 01)$

$(\delta\gamma \to \varepsilon) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$ $\times$ $(\varepsilon^\circ \to \gamma^\circ\delta^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$

$((01 \to 001) \to (001 \to 012)) \to (001 \to 00)$

$((012 \to 001) \to (001 \to 01)) \to (001 \to 00)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta \to \varepsilon^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((00 \to 012) \to (012 \to 001)) \to (012 \to 01)$

$((001 \to 012) \to (012 \to 00)) \to (012 \to 01)$

$(\delta\gamma\beta \to \varepsilon) \to \gamma^\circ\delta^\circ$ $\times$ $(\varepsilon^\circ \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ$

$((00 \to 001) \to (001 \to 012)) \to (001 \to 01)$

$((012 \to 001) \to (001 \to 00)) \to (001 \to 01)$

$(\gamma^\circ\delta^\circ \to \varepsilon\delta\gamma) \to \beta^\circ$ $\times$ $(\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \delta\gamma) \to \beta^\circ$

$((001 \to 01) \to (01 \to 012)) \to (01 \to 00)$

$((012 \to 01) \to (01 \to 001)) \to (01 \to 00)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon\delta\gamma \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \varepsilon^\circ$

$((00 \to 012) \to (012 \to 01)) \to (012 \to 001)$

$((01 \to 012) \to (012 \to 00)) \to (012 \to 001)$

$(\beta^\circ \to \delta\gamma\beta) \to \varepsilon\delta\gamma\beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \beta) \to \varepsilon\delta\gamma\beta$

$((01 \to 00) \to (00 \to 001)) \to (00 \to 012)$

$((001 \to 00) \to (00 \to 01)) \to (00 \to 012)$

$(\beta \to \delta\gamma) \to \varepsilon\delta\gamma$ $\times$ $(\gamma^\circ\delta^\circ \to \beta^\circ) \to \varepsilon\delta\gamma$

$((00 \to 01) \to (01 \to 001)) \to (01 \to 012)$

$((001 \to 01) \to (01 \to 00)) \to (01 \to 012)$

$(\beta^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta) \to \delta\gamma\beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \beta) \to \delta\gamma\beta$

$((01 \to 00) \to (00 \to 012)) \to (00 \to 001)$

$((012 \to 00) \to (00 \to 01)) \to (00 \to 001)$

$(\beta \to \varepsilon\delta\gamma) \to \delta\gamma$ $\times$ $(\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \beta^\circ) \to \delta\gamma$

$((00 \to 01) \to (01 \to 012)) \to (01 \to 001))$

$((012 \to 01) \to (01 \to 00)) \to (01 \to 001))$

$(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta) \to \beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \delta\gamma\beta) \to \beta$

$((001 \to 00) \to (00 \to 012)) \to (00 \to 01)$

$((012 \to 00) \to (00 \to 001)) \to (00 \to 01)$

$(\delta\gamma\beta \to \gamma^\circ\delta^\circ) \to \varepsilon$ $\times$ $(\delta\gamma \to \beta^\circ\delta^\circ\gamma^\circ) \to \varepsilon$

$((00 \to 001) \to (001 \to 01)) \to (001 \to 012)$

$((01 \to 001) \to (001 \to 00)) \to (001 \to 012)$

2.14. R= (00, 000, 001, 012)

$(\varepsilon\delta \to \varepsilon^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon \to \delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((000 \to 012) \to (012 \to 001)) \to (012 \to 00)$

$((001 \to 012) \to (012 \to 000)) \to (012 \to 00)$

$(\delta \to \varepsilon) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \qquad \times \qquad (\varepsilon^\circ \to \delta^\circ) \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$

$((000 \to 001) \to (001 \to 012)) \to (001 \to 00)$

$((012 \to 001) \to (001 \to 000)) \to (001 \to 00)$

$(\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \delta) \to \beta^\circ\gamma^\circ \qquad \times \qquad (\delta^\circ \to \varepsilon\delta) \to \beta^\circ\gamma^\circ$

$((012 \to 000) \to (000 \to 001)) \to (000 \to 00)$

$((001 \to 000) \to (000 \to 012)) \to (000 \to 00)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta \to \delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \varepsilon^\circ \qquad \times \qquad (\varepsilon\delta \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \varepsilon^\circ$

$((00 \to 012) \to (012 \to 000)) \to (012 \to 001)$

$((000 \to 012) \to (012 \to 00)) \to (012 \to 001)$

$(\delta\gamma\beta \to \varepsilon) \to \delta^\circ \qquad \times \qquad (\varepsilon^\circ \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \delta^\circ$

$((00 \to 001) \to (001 \to 012)) \to (001 \to 000)$

$((012 \to 001) \to (001 \to 00)) \to (001 \to 000)$

$(\varepsilon\delta\gamma\beta \to \varepsilon^\circ) \to \delta^\circ\varepsilon^\circ \qquad \times \qquad (\varepsilon \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((00 \to 012) \to (012 \to 001)) \to (012 \to 000)$

$((001 \to 012) \to (012 \to 00)) \to (012 \to 000)$

$(\beta^\circ\gamma^\circ \to \delta\gamma\beta) \to \varepsilon\delta\gamma\beta \qquad \times \qquad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \gamma\beta) \to \varepsilon\delta\gamma\beta$

$((000 \to 00) \to (00 \to 001)) \to (00 \to 012)$

$((001 \to 00) \to (00 \to 000)) \to (00 \to 012)$

$(\beta^\circ\gamma^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta) \to \delta\gamma\beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \gamma\beta) \to \delta\gamma\beta$

$((000 \to 00) \to (00 \to 012)) \to (00 \to 001)$

$((012 \to 00) \to (00 \to 000)) \to (00 \to 001)$

$(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \delta\gamma\beta) \to \gamma\beta$ $\times$ $(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \to \varepsilon\delta\gamma\beta) \to \gamma\beta$

$((012 \to 00) \to (00 \to 001)) \to (00 \to 000)$

$((001 \to 00) \to (00 \to 012)) \to (00 \to 000)$

$(\gamma\beta \to \delta) \to \varepsilon\delta$ $\times$ $(\delta^\circ \to \beta^\circ\gamma^\circ) \to \varepsilon\delta$

$((00 \to 000) \to (000 \to 001)) \to (000 \to 012)$

$((001 \to 000) \to (000 \to 00)) \to (000 \to 012)$

$(\gamma\beta \to \varepsilon\delta) \to \delta$ $\times$ $(\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \beta^\circ\gamma^\circ) \to \delta$

$((00 \to 000) \to (000 \to 012)) \to (000 \to 001)$

$((012 \to 000) \to (000 \to 00)) \to (000 \to 001)$

$(\delta\gamma\beta \to \delta^\circ) \to \varepsilon$ $\times$ $(\delta \to \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \to \varepsilon$

$((00 \to 001) \to (001 \to 000)) \to (001 \to 012)$

$((000 \to 001) \to (001 \to 00)) \to (001 \to 012)$

2.15. $R = (01, 000, 001, 012)$

$(\varepsilon\delta \to \varepsilon^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$ $\times$ $(\varepsilon \to \delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((000 \to 012) \to (012 \to 001)) \to (012 \to 01)$

$((001 \to 012) \to (012 \to 000)) \to (012 \to 01)$

$(\delta \to \varepsilon) \to \gamma^\circ\delta^\circ \qquad \times \qquad (\varepsilon^\circ \to \delta^\circ) \to \gamma^\circ\delta^\circ$

$((000 \to 001) \to (001 \to 012)) \to (001 \to 01)$

$((012 \to 001) \to (001 \to 000)) \to (001 \to 01)$

$(\varepsilon\delta\gamma \to \varepsilon^\circ) \to \delta^\circ\varepsilon^\circ \qquad \times \qquad (\varepsilon \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \delta^\circ\varepsilon^\circ$

$((01 \to 012) \to (012 \to 001)) \to (012 \to 000)$

$((001 \to 012) \to (012 \to 01)) \to (012 \to 000)$

$(\delta^\circ \to \varepsilon\delta) \to \gamma^\circ \qquad \times \qquad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \delta) \to \gamma^\circ$

$((001 \to 000) \to (000 \to 012)) \to (000 \to 01)$

$((012 \to 000) \to (000 \to 001)) \to (000 \to 01)$

$(\delta\gamma \to \varepsilon) \to \delta^\circ \qquad \times \qquad (\varepsilon^\circ \to \gamma^\circ\delta^\circ) \to \delta^\circ$

$((01 \to 001) \to (001 \to 012)) \to (001 \to 000)$

$((012 \to 001) \to (001 \to 01)) \to (001 \to 000)$

$(\varepsilon\delta\gamma \to \delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \varepsilon^\circ \qquad \times \qquad (\varepsilon\delta \to \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \to \varepsilon^\circ$

$((01 \to 012) \to (012 \to 000)) \to (012 \to 001)$

$((000 \to 012) \to (012 \to 01)) \to (012 \to 001)$

$(\gamma^\circ \to \varepsilon\delta\gamma) \to \varepsilon\delta\gamma \qquad \times \qquad (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \gamma) \to \varepsilon\delta\gamma$

$((000 \to 01) \to (01 \to 012)) \to (01 \to 012)$

$((012 \to 01) \to (01 \to 000)) \to (01 \to 012)$

$(\gamma^\circ\delta^\circ \to \gamma) \to \delta\gamma \qquad \times \qquad (\gamma^\circ \to \delta\gamma) \to \delta\gamma$

$((001 \to 01) \to (01 \to 000)) \to (01 \to 001)$

$((000 \to 01) \to (01 \to 001)) \to (01 \to 001)$

$(\gamma^\circ\delta^\circ \to \varepsilon\delta\gamma) \to \gamma \qquad \times \qquad (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \delta\gamma) \to \gamma$

$((001 \to 01) \to (01 \to 012)) \to (01 \to 000)$

$((012 \to 01) \to (01 \to 001)) \to (01 \to 000)$

$(\gamma \to \delta) \to \varepsilon\delta \qquad \times \qquad (\delta^\circ \to \gamma^\circ) \to \varepsilon\delta$

$((01 \to 000) \to (000 \to 001)) \to (000 \to 012)$

$((001 \to 000) \to (000 \to 01)) \to (000 \to 012)$

$(\gamma \to \varepsilon\delta) \to \delta \qquad \times \qquad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \to \gamma^\circ) \to \delta$

$((01 \to 000) \to (000 \to 012)) \to (000 \to 001)$

$((012 \to 000) \to (000 \to 01)) \to (000 \to 001)$

$(\delta\gamma \to \delta^\circ) \to \varepsilon \qquad \times \qquad (\delta \to \gamma^\circ\delta^\circ) \to \varepsilon$

$((01 \to 001) \to (001 \to 000)) \to (001 \to 012)$

$((000 \to 001) \to (001 \to 01)) \to (001 \to 012)$

Literatur

Bense, Max, Geist der Mathematik. Berlin 1939

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Gardner, Martin, Mathematical Games: The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game “Life”. In: Scientific American, vol. 223 (Oct. 1970), S. 120–123

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Toth, Alfred, E.T.A. Hoffmanns chiastischer Karneval. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2006

Toth, Alfred, Grundlegung einer polykontexturalen Semiotik. Tucson, AZ, 2019 (= 2019a)

Toth, Alfred, Polykontexturale semiotische Automaten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019b

Toth, Alfred, Die Autoreproduktion von Subzeichen in semiotischen Automaten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019c

Toth, Alfred, Die Autoreproduktion von Proto- und Deuterozahlen in semiotischen Automaten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019d

Toth, Alfred, Die Morphismen der Proto- und Deuterosemiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019e

Toth, Alfred, Kategorientheoretische Darstellung polykontexturaler semiotischer Automaten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019f

Toth, Alfred, Phasenübergänge bei polykontexturalen semiotischen Automaten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019g

Toth, Alfred, Phasen Die qualitativen Gruppen der 360 Regeln semiotischer CAs. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019h

Toth, Alfred, Paarweise Reflexivität der 360 Regeln semiotischer CAs. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019i

23.6.2019